Un regret unifié pour l'optimisation convexe séquentielle

Pierre Gaillard

EDF – École Normale Supérieure

28 mai 2013

Publié dans NIPS 2012 avec N. Cesa-Bianchi, G. Lugosi et G. Stoltz.

Introduction

Problème d'optimisation convexe séquentielle

$$\sum_{t=1}^{T} (\widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \mathbf{x}_t - y_t)^2 = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_d} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_t - y_t)^2 \right\} + \mathrm{Regret}_T$$

Linéarisation

$$\begin{aligned}
\mathrm{Regret}_T &= \textstyle\sum_{t=1}^T (\widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \mathbf{x}_t - y_t)^2 - (\mathbf{q}^\star \cdot \mathbf{x}_t - y_t)^2 \\
&\leqslant \textstyle\sum_{t=1}^T \underbrace{2(\widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \mathbf{x}_t - y_t)\mathbf{x}_t}_{} \cdot (\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{q}^\star) \\
&= \textstyle\sum_{t=1}^T \boldsymbol{\ell}_t \cdot (\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{q}^\star) \\
&\leqslant \textstyle\sum_{t=1}^T \widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t - \min_i \sum_{t=1}^T \ell_{i,t}
\end{aligned}$$

Problème linéarisé

$$\sum_{t=1}^{T} \widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t = \min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=1}^{T} \ell_{i,t} + \mathrm{Regret}'_T$$

Cadre séquentiel linéarisé

À chaque instant $t = 1, \dots, T$,

1. Nous proposons $\widehat{\mathbf{p}}_t = (\widehat{p}_{1,t}, \dots, \widehat{p}_{d,t}) \in \Delta_d$
2. La nature choisit un vecteur de pertes
$$\boldsymbol{\ell}_t = (\ell_{1,t}, \dots, \ell_{d,t}) \in [0,1]^d$$
3. Nous subissons alors la perte linéaire $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t$.

Un exemple d'objectif consiste à minimiser notre regret cumulée

$$\mathcal{R}_T = \sum_{t=1}^{T} \widehat{\mathbf{p}}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t - \min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=1}^{T} \ell_{i,t}$$

But de cet exposé

- Unification et amélioration de diverses notions de regrets
- Présenter un algorithme minimisant le regret général

Les notions de regrets

À l'instant t, nous proposons les poids $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \Delta_d$ et nous subissons la perte $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t$.

Regret généralisé

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t \left(\widehat{\ell}_t - \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t \right)$$

Algorithme Fixed-Share

Escomptes

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t \left(\widehat{\ell}_t - \ell_{i,t} \right)$$

Environnement changeant

$$\sum_{t=1}^T \widehat{\ell}_t - \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t$$

Sous intervalles du temps

$$\sum_{t=r}^s \widehat{\ell}_t - \ell_{i,t}$$

Meilleur expert

$$\sum_{t=1}^T \widehat{\ell}_t - \ell_{i,t}$$

La notion de regret – Environnement stationnaire

À l'instant t, nous proposons les poids $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \Delta_d$ et nous subissons la perte $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t$.

Notre perte cumulée se décompose

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{T} \widehat{\ell}_t}_{\text{Notre perte}} = \underbrace{\min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=1}^{T} \ell_{i,t}}_{\text{Erreur d'approximation}} + \underbrace{\mathcal{R}_T}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Objectif

Avoir un regret moyen qui converge uniformément vers 0

$$\sup_{\ell_1,\dots,\ell_T \in [0,1]^d} \frac{\mathcal{R}_T}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\,.$$

Regret dans un environnement changeant

À l'instant t, nous proposons les poids $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \Delta_d$ et nous subissons la perte $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t$.

Notre perte cumulée se décompose

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{T} \widehat{\ell}_t}_{\text{Notre perte}} = \underbrace{\min_{\substack{\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_T \\ \text{tq } [\ldots]}} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t}_{\text{Erreur d'approximation}} + \underbrace{\mathcal{R}_T}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Objectif

Avoir un regret moyen qui converge uniformément vers 0

$$\max_{\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_T \in [0,1]^d} \frac{\mathcal{R}_T}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\,.$$

Les notions de regrets

À l'instant t, nous proposons les poids $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \Delta_d$ et nous subissons la perte $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \boldsymbol{\ell}_t$.

Regret généralisé

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t \left(\widehat{\ell}_t - \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t \right)$$

Algorithme Fixed-Share

Escomptes

$$\sum_{t=1}^T \gamma_t \left(\widehat{\ell}_t - \ell_{i,t} \right)$$

Environnement changeant

$$\sum_{t=1}^T \widehat{\ell}_t - \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t$$

Sous intervalles du temps

$$\sum_{t=r}^s \widehat{\ell}_t - \ell_{i,t}$$

Meilleur expert

$$\sum_{t=1}^T \widehat{\ell}_t - \ell_{i,t}$$

Regret escompté

À l'instant t, nous proposons les poids $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \Delta_d$ et nous subissons la perte $\widehat{\ell}_t = \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t$.

Des facteurs d'escomptes $\gamma_t \in [0,1]$ mesurent l'importance relative des pertes plus ou moins récentes.

Notre perte cumulée escomptée s'écrit

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t}_{\text{Notre perte}} = \underbrace{\min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \ell_{i,t}}_{\text{Erreur d'approximation}} + \underbrace{\mathcal{R}_T^{\mathrm{esc}}}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Objectif

Avoir un regret moyen qui converge uniformément vers 0

$$\sup_{\ell_1,\dots,\ell_T \in [0,1]^d} \frac{\mathcal{R}_T^{\mathrm{esc}}}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\,.$$

Regret sur des sous-intervalles du temps.

Pour $1 \leqslant \tau_T \leqslant T$, notre regret sur les sous intervalles de longueur τ_T est donné par

$$\mathcal{R}_T^{\tau_T-\mathrm{adapt}} = \max_{\substack{[r,s] \subset [1,T] \\ s+1-r \leqslant \tau_T}} \left\{ \sum_{t=r}^{s} \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \boldsymbol{\ell}_t - \min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=r}^{s} \ell_{i,t} \right\} .$$

Objectif

Avoir un regret moyen qui converge uniformément vers 0

$$\sup_{\ell_1,\dots,\ell_T \in [0,1]^d} \frac{\mathcal{R}_T^{\tau_T-\mathrm{adapt}}}{\tau_T} \xrightarrow[T \to \infty]{} 0 .$$

Algorithme Fixed-Share, Herbster & Warmuth 1998

Paramètres: $\eta > 0$, vitesse d'apprentissage et $0 < \alpha < 1$, proportion de mélange

Initialisation: $\widehat{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{v}_1 = (1/d, \dots, 1/d)$

Pour chaque instant $t = 1, \dots, T$,

1. Prévoir $\widehat{\mathbf{p}}_t$;
2. Observer les pertes $\boldsymbol{\ell}_t \in [0,1]^d$;
3. [Mise à jour des poids selon les pertes] $\mathbf{v}_{t+1}$ tel que
$$v_{j,t+1} = \frac{\widehat{p}_{j,t}\, e^{-\eta\, \ell_{j,t}}}{\sum_{i=1}^{d} \widehat{p}_{i,t}\, e^{-\eta\, \ell_{i,t}}}$$
4. [Mise à jour de partage] $\widehat{\mathbf{p}}_{t+1} = (1-\alpha)\mathbf{v}_{t+1} + \alpha\widehat{\mathbf{p}}_1$.

Borne de regret – Herbster & Warmuth 1998

Critère de régularité pour la suite $\mathbf{q}_1^T = \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_T \in \Delta_d$ de comparaison

$$\left\| \mathbf{q}_1^T \right\|_1 = \|\mathbf{q}_1\|_1 + \sum_{t=1}^{T-1} \|\mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t\|_1$$

Théorème (Herbster & Warmuth 1998)

Soit $T \geqslant 1$. Pour toutes suites de pertes $\boldsymbol{\ell}_1^T \in [0,1]^{d \times T}$ et de comparaison $\mathbf{q}_1^T \in \Delta_d^T$,

$$\sum_{t=1}^{T} \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \boldsymbol{\ell}_t - \sum_{t=1}^{T} \mathbf{q}_t^\top \boldsymbol{\ell}_t \leqslant \frac{\ln d}{\eta} + \frac{\eta}{8} T + \frac{\left\| \mathbf{q}_1^T \right\|_1}{\eta} \ln \frac{d}{\alpha} + \frac{T - \left\| \mathbf{q}_1^T \right\|_1}{\eta} \ln \frac{1}{1-\alpha} \,.$$

Borne de regret – Herbster & Warmuth 1998

Critère de régularité pour la suite $\mathbf{q}_1^T = \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_T \in \Delta_d$ de comparaison

$$\left\| \mathbf{q}_1^T \right\|_1 = \|\mathbf{q}_1\|_1 + \sum_{t=1}^{T-1} \|\mathbf{q}_{t+1} - \mathbf{q}_t\|_1$$

Nous pouvons optimiser le théorème en les paramètres η et α.

Corollaire (Herbster & Warmuth 1998)

Pour η et α bien choisis en fonction de m_T et T, pour toute suite de pertes $\boldsymbol{\ell}_1^T \in [0,1]^{d \times T}$ l'algorithme fixed-share vérifie

$$\sum_{t=1}^{T} \widehat{\ell}_t - \inf_{\left\|\mathbf{q}_1^T\right\|_1 \leqslant m_T} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{q}_t \cdot \boldsymbol{\ell}_t \leqslant \square \sqrt{m_T T \ln\left(\frac{dT}{m_T}\right)}.$$

En particulier, $R_T \ll T$ dès que $m_T \ll T$.

Borne de regret – généralisation aux escomptes

Critère de régularité. Pour des suites de comparaison $\mathbf{q}_1^T \in \Delta_d^T$, et d'escomptes $\gamma_1^T \in \mathbb{R}^T$ on note

$$m(\gamma_1^T, \mathbf{q}_1^T) = \gamma_1 + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} (\gamma_t \mathbf{q}_{i,t} - \gamma_{t-1} \mathbf{q}_{i,t-1})_+$$

Théorème

Soit T, m_T et $U_T \geqslant 1$. Pour tous $\ell_1^T, \mathbf{q}_1^T$ et γ_1^T tels que

$$m(\gamma_1^T, \mathbf{q}_1^T) \leqslant m_T \qquad \text{et} \qquad \textstyle\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \leqslant U_T$$

l'algorithme fixed-share vérifie

$$\mathcal{R}_T := \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \left(\widehat{\mathbf{p}}_t^\top \ell_t - \mathbf{q}_t^\top \ell_t \right) \leqslant \sqrt{\frac{U_T\, m_T}{2} \ln\left(\frac{d\, e\, U_T}{m_T}\right)}$$

En particulier, le regret $\mathcal{R}_T \ll T$ dès que $U_T m_T \ll T$.

Regret escompté

Pour les escomptes $\gamma_t \in [0,1]$, notre regret escompté est donné par

$$\mathcal{R}_T^{\mathrm{esc}} = \max_{i \in 1,\dots,d} \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \left(\widehat{\mathbf{p}}_t^{\top} \boldsymbol{\ell}_t - \ell_{i,t} \right) . \tag{1}$$

Les facteurs d'escomptes γ_t mesurent l'importance relative des pertes plus ou moins récentes.

Corollaire

Soit $T \geqslant 1$. Pour tous ℓ_1^T, γ_1^T tels que $\sum_{t=1}^T \gamma_t \leqslant U_T$, l'algorithme fixed-share vérifie

$$\mathcal{R}_T^{\mathrm{esc}} \leqslant \sqrt{U_T \ln\left(d\, e\, U_T\right)/2} \,.$$

Regret pour des sous-intervalles du temps.

Pour $1 \leqslant \tau_T \leqslant T$, notre regret sur les sous intervalles de longueur τ_T est donné par

$$\mathcal{R}_T^{\tau_T-\mathrm{adapt}} = \max_{\substack{[r,s] \subset [1,T] \\ s+1-r \leqslant \tau_T}} \left\{ \sum_{t=r}^{s} \widehat{\mathbf{p}}_t^\top \boldsymbol{\ell}_t - \min_{i=1,\dots,d} \sum_{t=r}^{s} \ell_{i,t} \right\} .$$

Corollaire

Soit $\tau_T, T \geqslant 1$. Pour toutes pertes $\boldsymbol{\ell}_1^T$ l'algorithme fixed-share vérifie

$$\mathcal{R}_T^{\tau_T-\mathrm{adapt}} \leqslant \square \sqrt{\tau_T \ln(d\tau_T)} .$$